Divisione in tre parti uguali

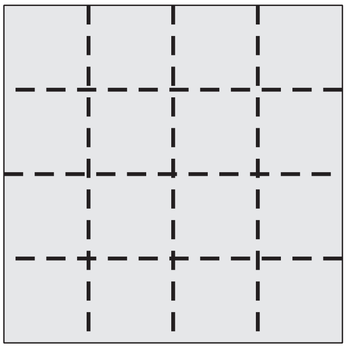
A)

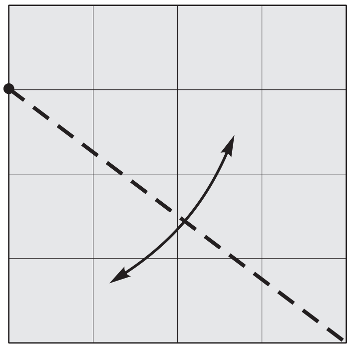
Il metodo più pratico per dividere un quadrato in tre parti uguali è quello di trisecare "ad occhio" il foglio ed "aggiustare" la parte in eccesso o in difetto con piccoli spostamenti laterali (Fig. 1). Una volta raggiunta una soddisfacente sovrapposizioni degli estremi del foglio con le terze parti, fissare la piega, aprire e piegare con cura.

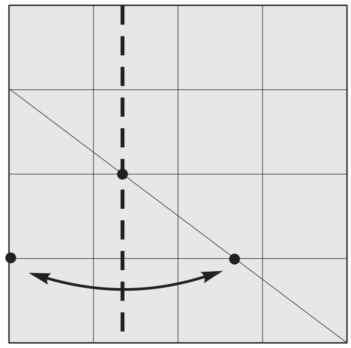
1

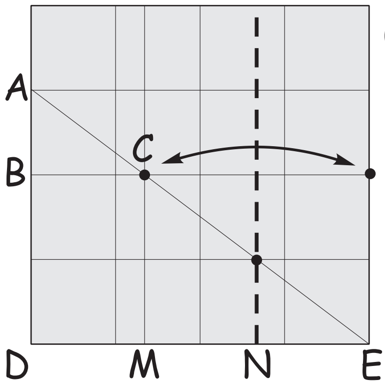
B)

Un metodo più preciso ma meno pratico è il seguente: **Metodo di Sidney French**

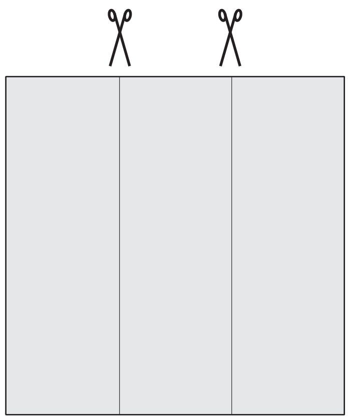

1


2


3



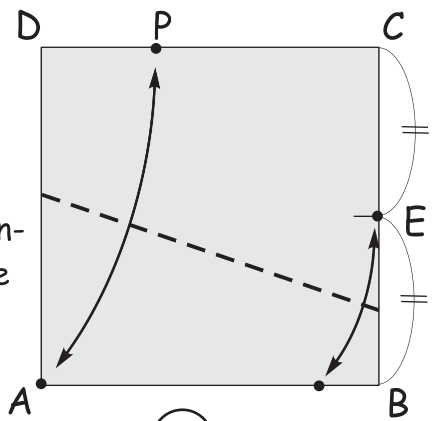
4


5

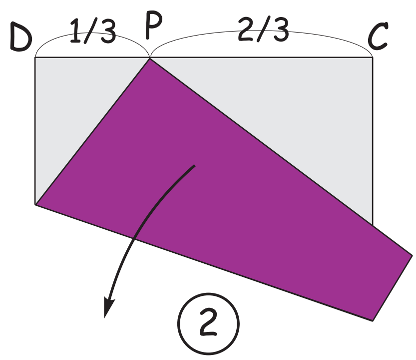
Dimostrazione:
"I triangoli $\hat{ABC}$ e $\hat{ADE}$ (Fig. 4) sono simili.
Allora AB : BC = AD : DE
1/4 : BC = 3/4 : 1 da cui
BC = DM = 1/3. Stessa cosa per i due segmenti MN ed NE che risultano essere uguali ad 1/3 di DE"

C) **Metodo di Kazuo Haga**

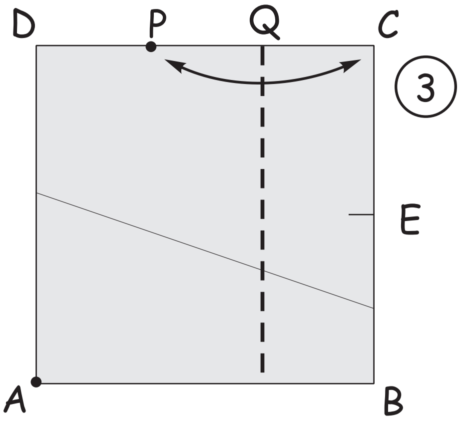
Un terzo metodo è il seguente:
Piegare AB su DC per trovare il punto medio di BC. Riaprire e piegare facendo in modo che contemporaneamente A vada a cade su DC e AB passi per E punto medio di BC.
Il segmento DP = 1/3 DC

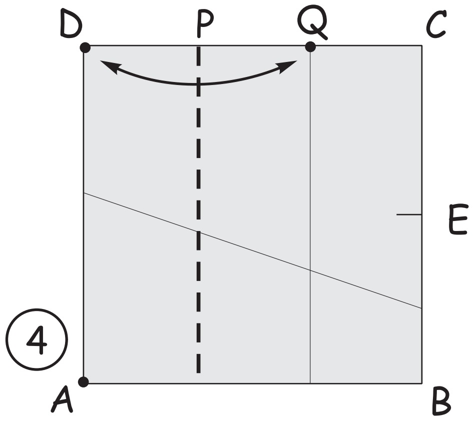


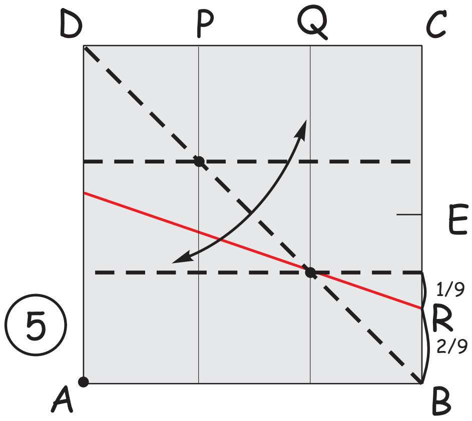
1

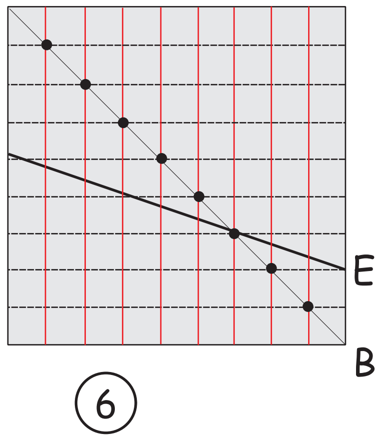


2

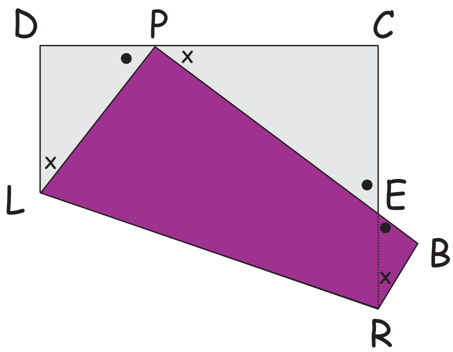








Facendo unicamente la prima piega e la diagonale, è possibile più agevolmente, dividere in 3 parti uguali CB. Non solo! E' anche possibile dividere in 9 parti uguali il lato CB in quanto il segmento RB risulta 2/9 di CB. Fig. 5 e Fig. 6.



Dimostrazione:

"I triangoli $D\hat{P}L$ $P\hat{C}E$ $E\hat{B}R$ risultano simili.

Si ha che $DP = x$, $DL = y$, $PC = 1-x$, $CE = \frac{1}{2}$ quindi $x : y = \frac{1}{2} : (1 - x)$ e $y = 2x(1 - x)$

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $D\hat{P}L$ si ha:

$x^2 + 4x^2(1 - x)^2 = [1 - 2x(1-x)]^2$

$x^2 + 4x^2(1 + x^2 -2x) = (1 -2x + 2x^2)^2$

$x^2 + 4x^2 + 4x^4 - 8x^3 = 1 + 4x^2 + 4x^4 - 4x + 4x^2 - 8x^3$

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

$x = [2 \pm \sqrt{4 - 3}] / 3$ e in definitiva

$x_1 = 1$ (soluzione non accettabile)

$x_2 = 1/3$ (soluzione accettabile) e pertanto $DP = 1/3\ DC$

$DL = y = 2/3(1 - 1/3) = 4/9$ mentre $PL = 1 - 4/9 = 5/9$.

Il triangolo $P\hat{D}L$ ha i lati proporzionali alla terna pitagorica 3,4,5. Perciò gli altri due triangoli considerati hanno le seguenti dimensioni:

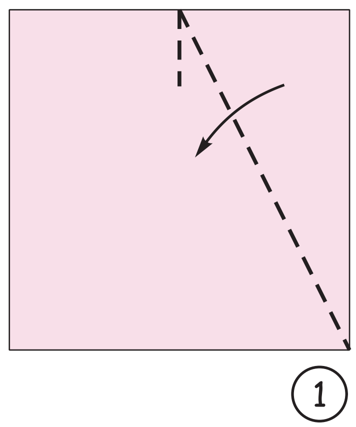
$EC = \frac{1}{2}$ (cioè 3/6); $PC = 2/3$ (cioè 4/6); $PE = 5/6$ riferendosi al triangolo $P\hat{C}E$.

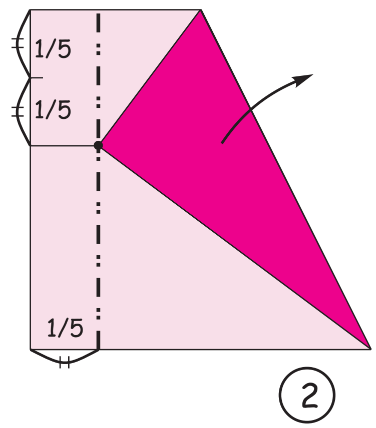
$EB = 1 - 5/6 = 1/6$ (cioè 3/18); $BR = 4/18$; $ER = 5/18$ riferendosi al triangolo $E\hat{B}R$.

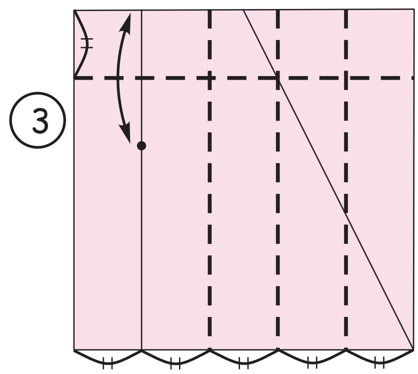
Da ciò risulta, infine, che essendo $BR = 4/18 = 2/9$ è possibile avere un riferimento per poter dividere il foglio in 9 parti uguali."

Divisione in 5 parti uguali

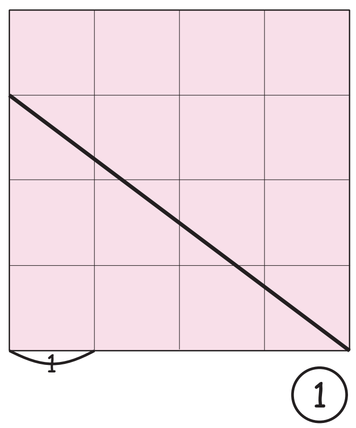
Metodo di K. Kasahara

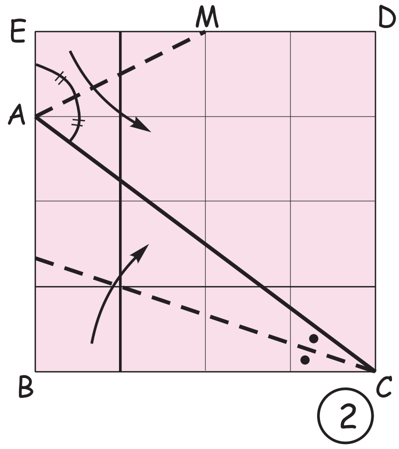


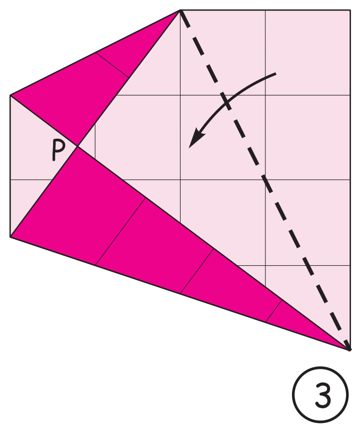


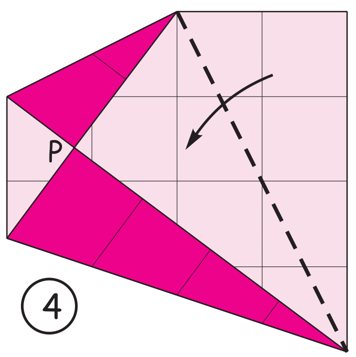


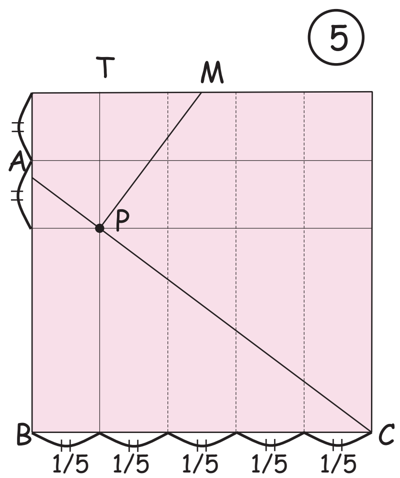
Dimostrazione "visiva"





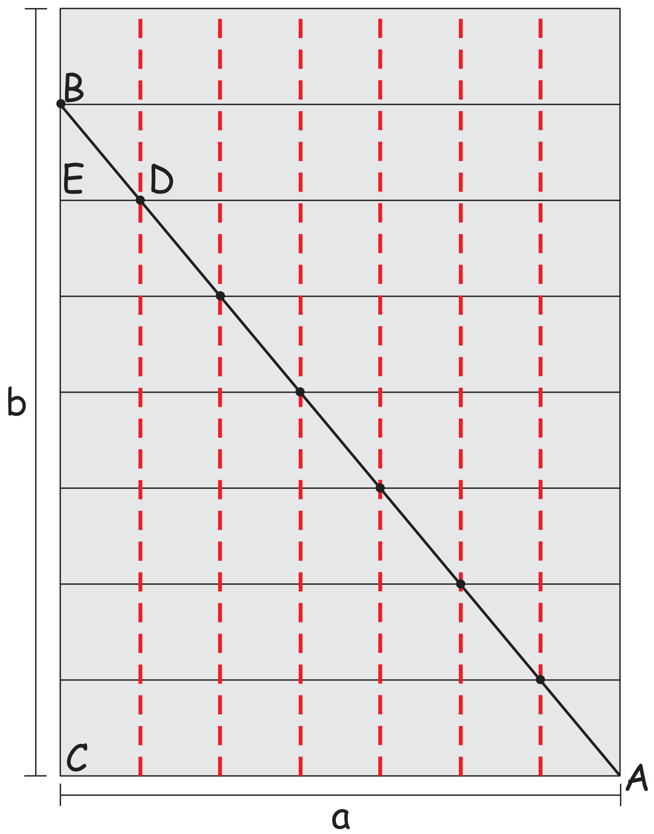






"Il segmento AC = $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (3,4,5 terna pitagorica).
La bisettrice dell'angolo E$\hat{A}$C passa per il punto medio M, di ED (provate a dimostrarlo in modo rigoroso!!).
Lo si deduce dalle figure 2, 3, 4 e dal fatto che i segmenti EM e MD coincidono nel punto "P" ottenuto dalle due piegature (Fig. 2,3,4).
Il punto "P" divide AC in due parti 1/5 e 4/5 e quindi per il Teorema di Talete mandando per "P" una parallela ad AB e successivamente un fascio di altre tre parallele si ottiene una suddivisione di BC in 5 parti uguali. (Fig. 5)
Essendo infine PM = 2 TM = (2 - 4/5) si ha per il Teorema di Pitagora:
$PT = \sqrt{2^2 - (2 - 4/5)^2} = \sqrt{4 - 36/25} = \sqrt{64/25} = 8/5$
risulta essere doppio della quinta parte del segmento BE."

Teorema di Talete applicazioni

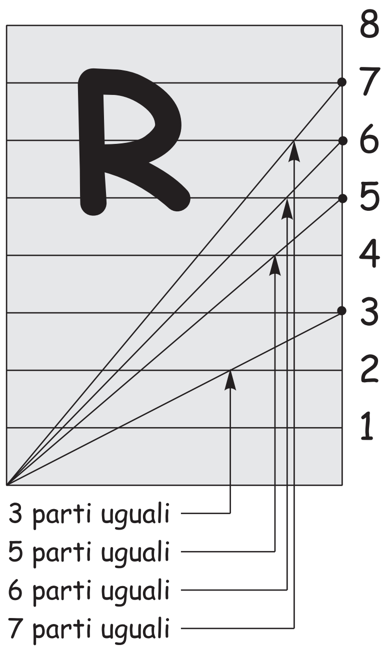


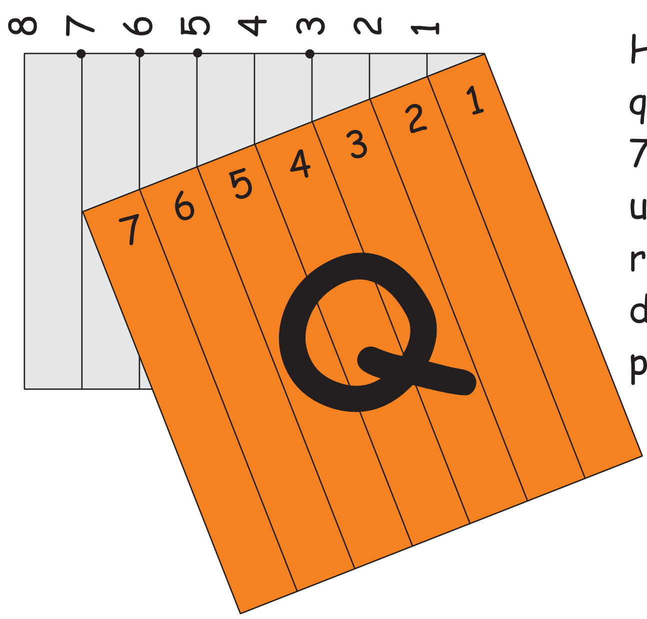
Per dividere un foglio qualsiasi in n parti uguali rispetto al lato "a" si può procedere nel seguente modo:
Si divide "b" in un numero di parti equivalenti alla potenza di 2 immediatamente superiore ad "n". Si congiunge quindi la n-esima suddivisione con il vertice A (ovviamente piegando),
Le intersezioni di questa traccia con le suddivisioni fatte sul lato "b" danno i riferimenti per poter dividere "a" nelle "n" parti stabilite.

Dimostrazione:

"Sia "a" da suddividere in "n" parti.
Divido b in 2^k parti con $n < 2^k$. Dalla figura e dalla similitudine dei triangoli $B\hat{E}D$ e $B\hat{C}A$ si ha $b/2^k : x = n(b/2^k) : a$ da cui
$x = (ab/2^k) * (2^k/nb) = a/n$. Cvd."

E' possibile dividere un segmento o un lato di un quadrato usando uno strumento di semplicissima costruzione ed utilizzabile da alunni di scuola elementare e media. Occorre un rettangolo di cartoncino rigido o plastica diviso in un numero pari (più facile secondo le potenze di 2) di parti uguali.



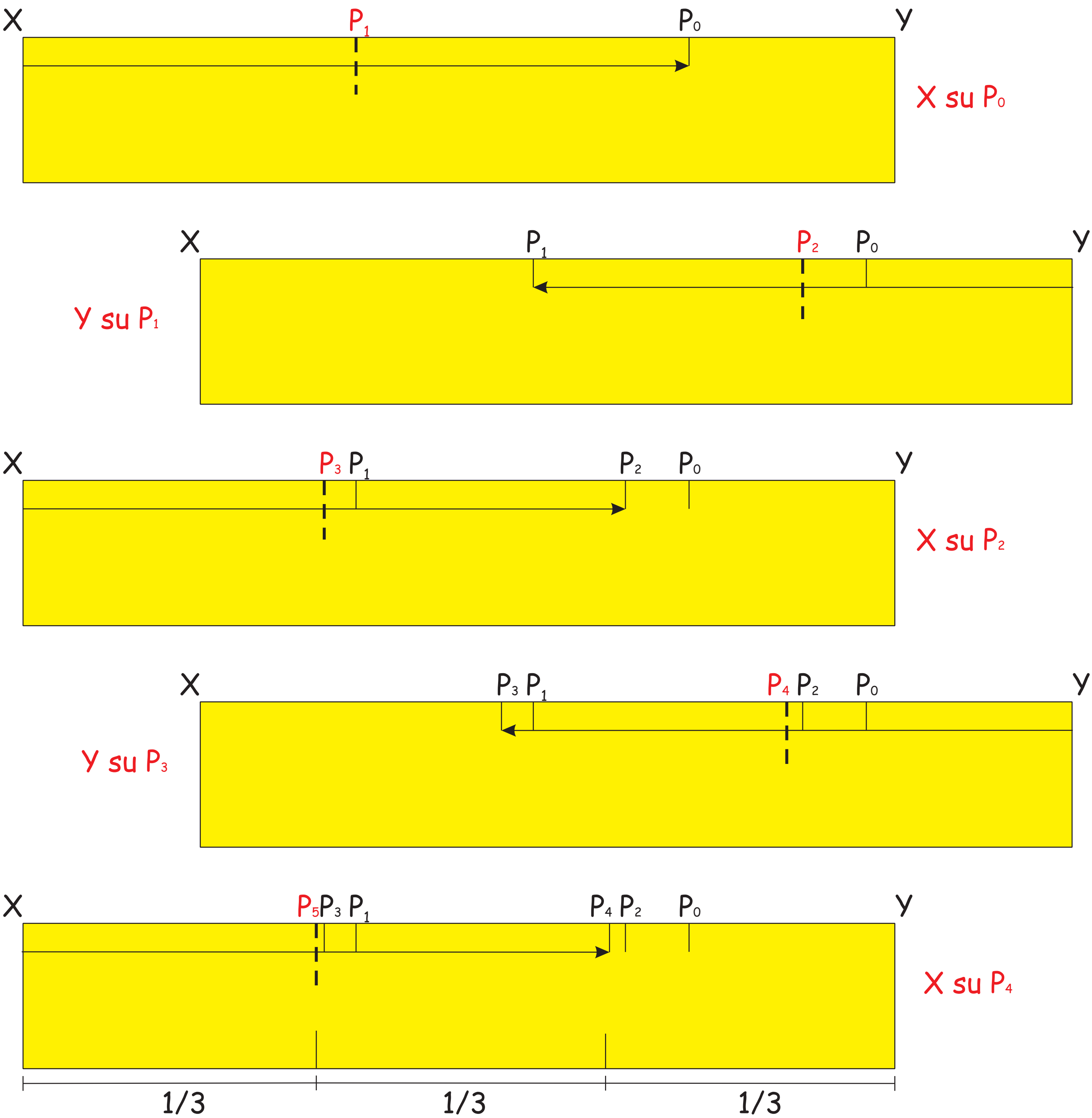


Ho diviso il quadrato Q in 7 parti uguali utilizzando il rettangolo R diviso in 8 parti uguali.

Convergenze e approssimazioni

Metodo di S. Fujimoto

Tramite piegatura è possibile dividere un segmento o un angolo in parti uguali con metodi convergenti e quindi approssimazioni. Si può dividere XY (Fig. 1) in 3 parti uguali con la seguente procedura che può essere ripetuta per ottenere un'approssimazione migliore. Si scelga un punto P_0 qualunque su XY

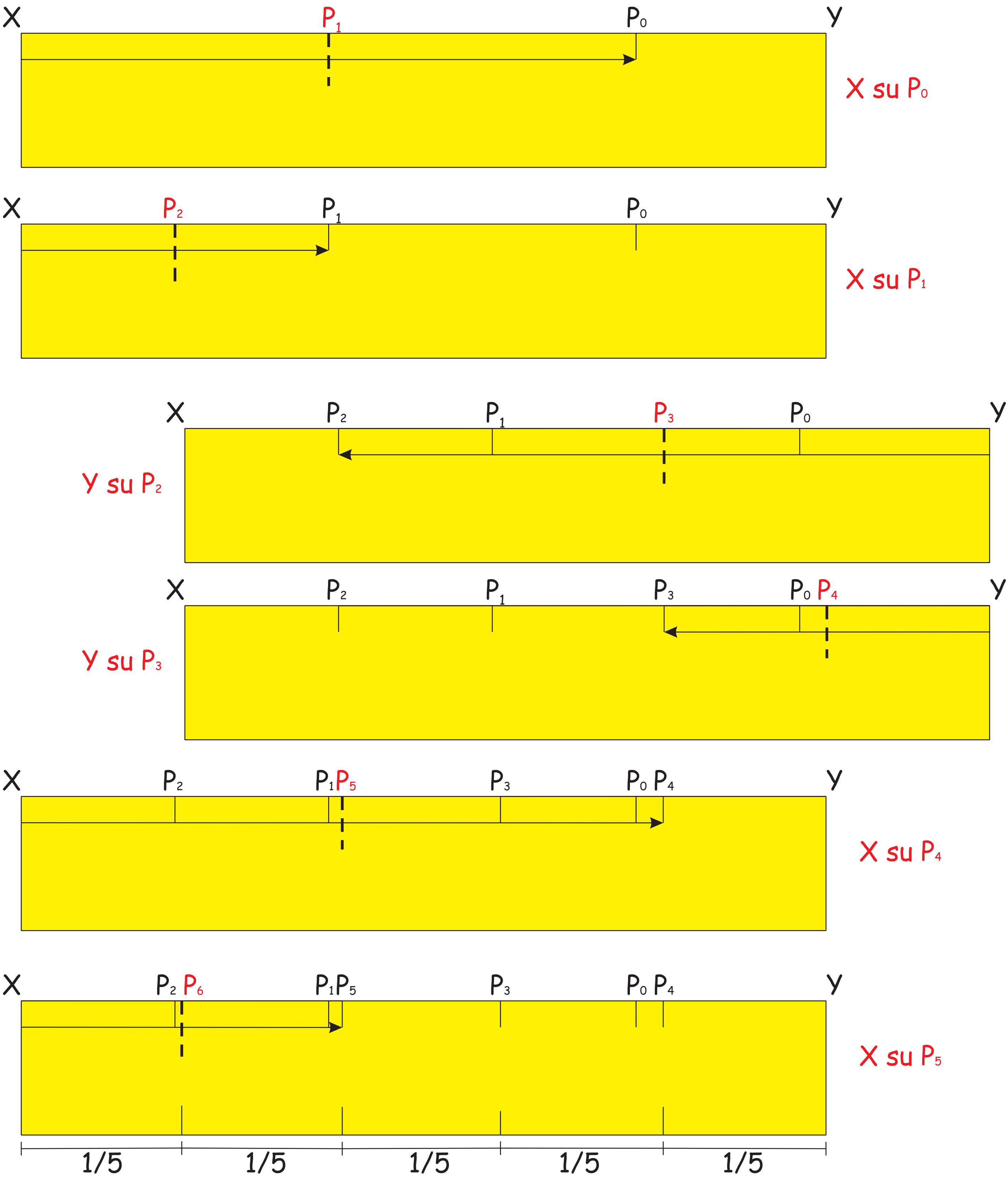


Scegliendo il punto iniziale P_0 nelle "vicinanze" di 1/3 il metodo converge più velocemente e quindi occorrono meno pieghe per avere un soddisfacente XY/3

Convergenze e approssimazioni

Metodo di S. Fujimoto

Procedura per ottenere 1/5. Si scelga un punto P_0 qualunque su XY

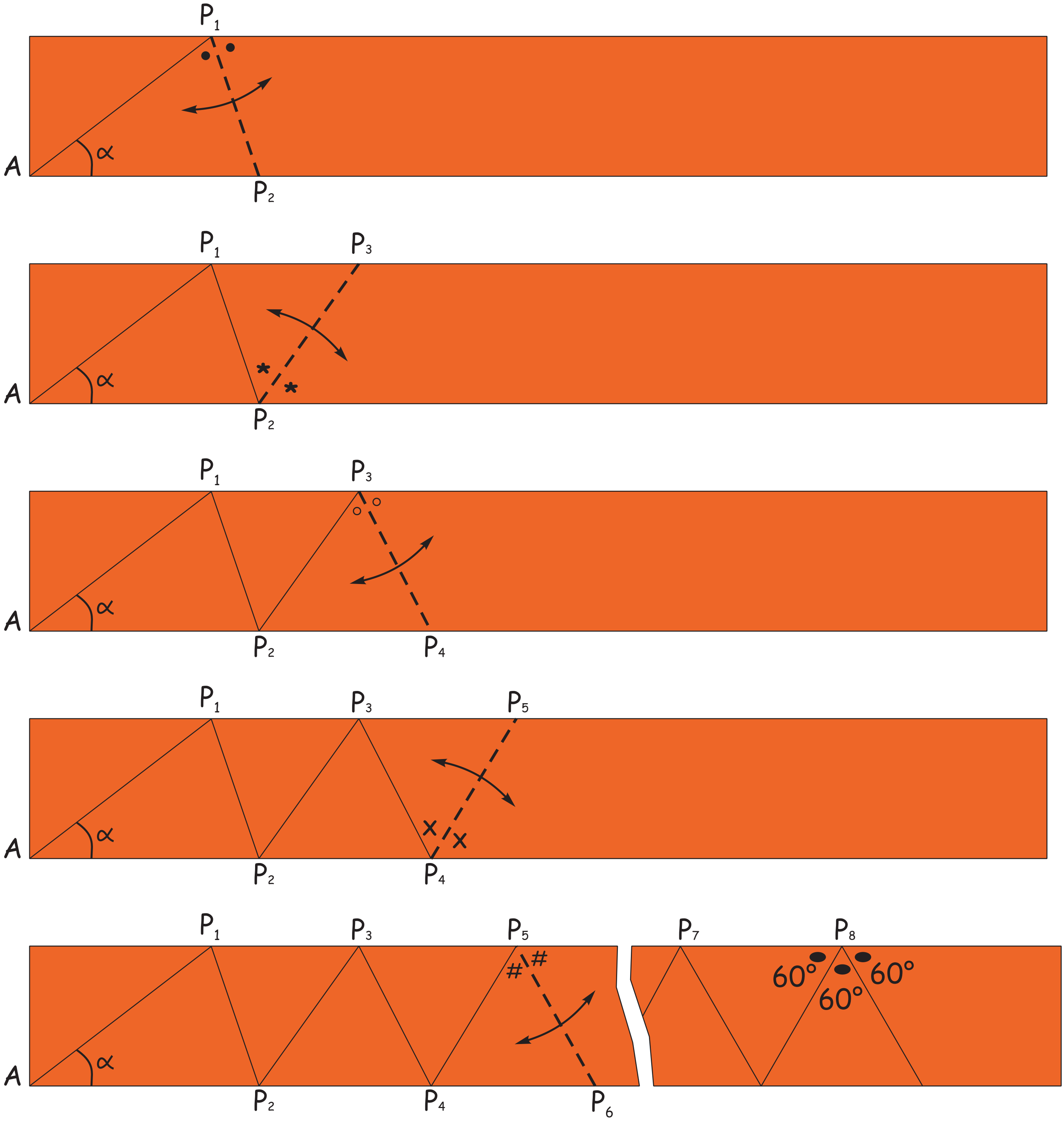


Scegliendo il punto iniziale P_0 nelle "vicinanze" di 1/5 il metodo converge più velocemente e quindi occorrono meno pieghe per avere un soddisfacente XY/5

Approssimazioni di angoli 60°

Metodo di S. Fujimoto

Per ottenere una rapida convergenza alla misura di un angolo, è possibile usare il seguente metodo dovuto a S. Fujimoto e J. Pedersen.
Si prenda una striscia di carta e volendo, ad esempio, approssimare un angolo di 60°, si scelga un arbitrario angolo $\hat{\alpha}$ individuato da una trasversale AP_1 e si prosegua con le istruzioni seguenti:

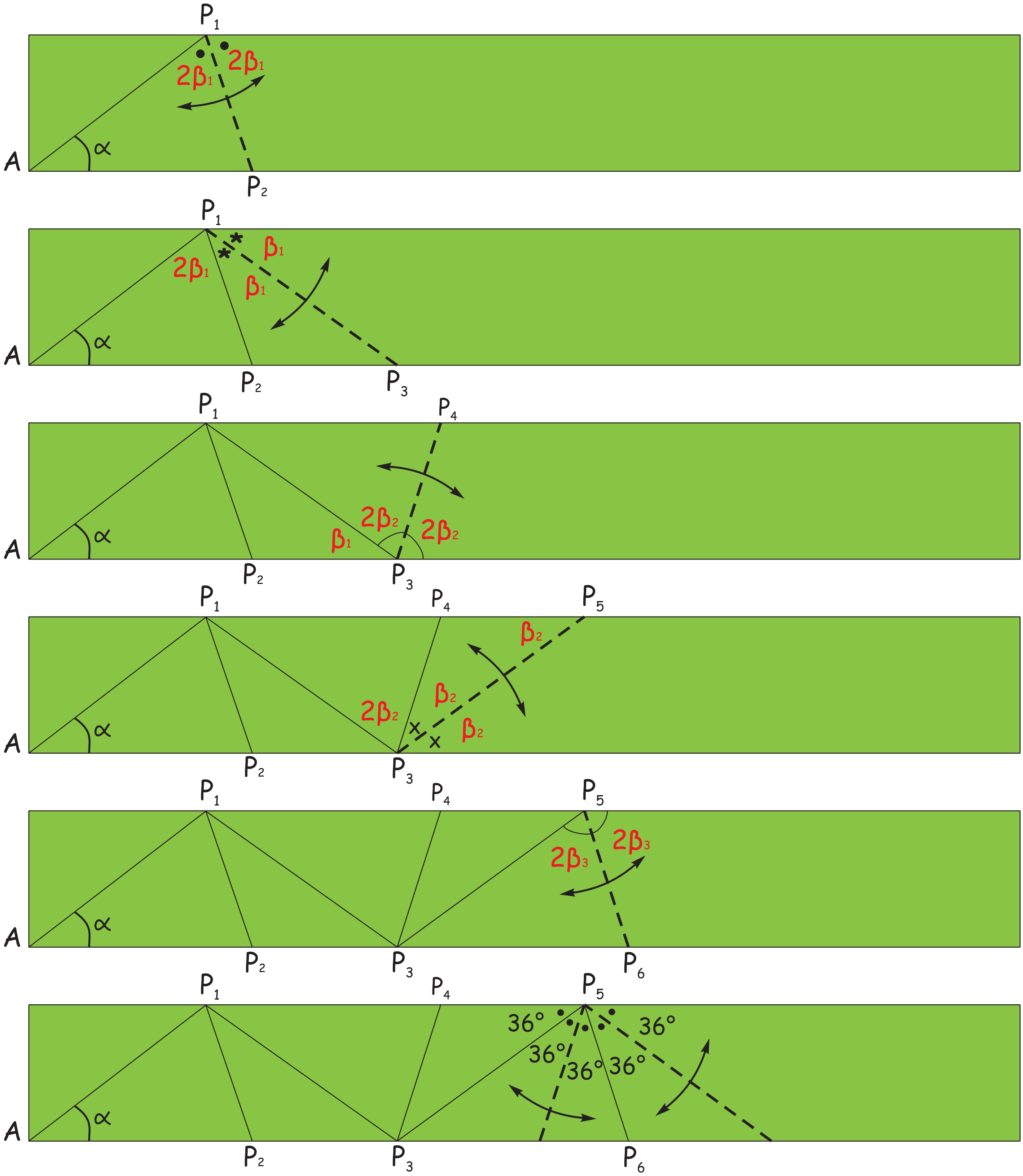


Dopo pochi passaggi le pieghe formano con notevole precisione angoli di 60°.

Approssimazioni di angoli 36°

Metodo di S. Fujimoto

Si scelga un arbitrario angolo $\hat{\alpha}$ individuato da una trasversale AP_1 ottenuta piegando una striscia di carta partendo da un vertice A. Proseguire seguendo le istruzioni.

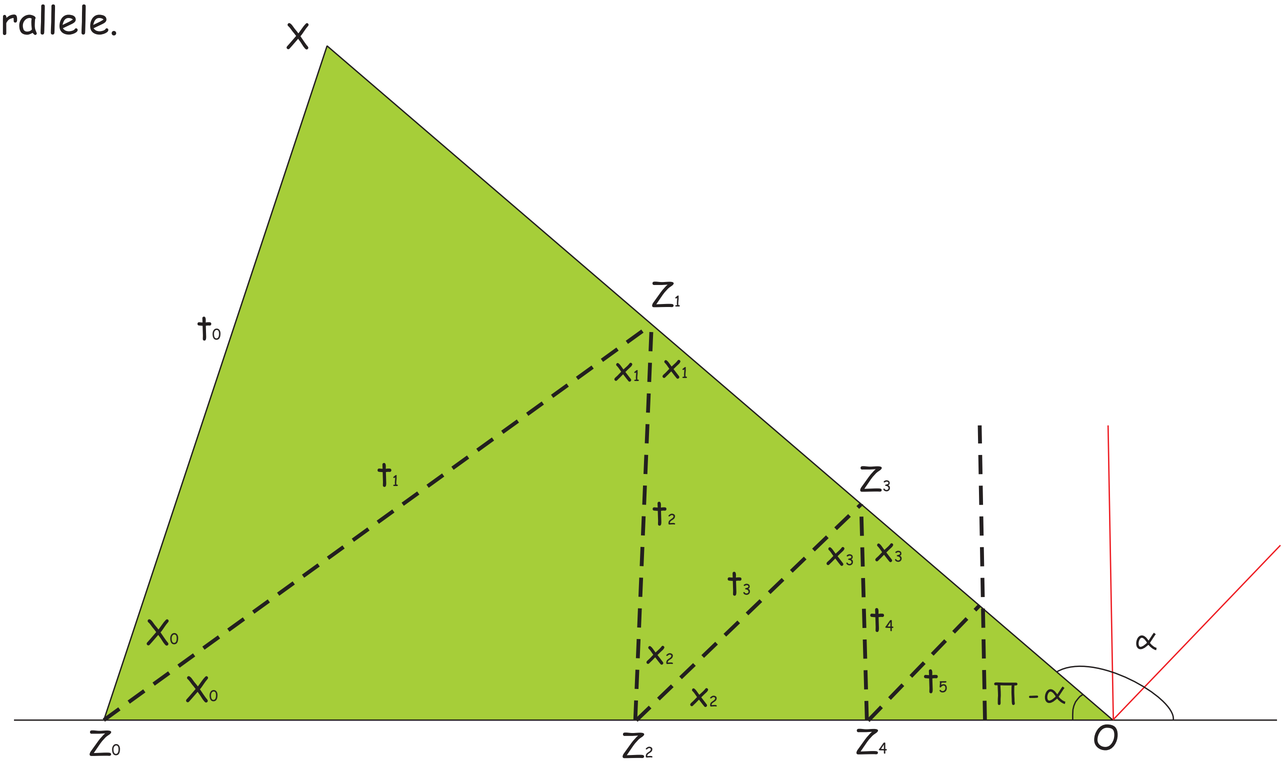


Dopo pochi passaggi le pieghe formano con notevole precisione angoli di 36°.

Convergenza e trisezione

Di J. Pedersen

Il metodo di bisezione precedente può anche essere utilizzato con rette non parallele.



Bisecare l'angolo $X\hat{Z}_0O$ facendo sovrapporre il lato Z_0X su Z_0O. Proseguire bisecando $Z_0\hat{Z}_1O$ facendo sovrapporre Z_oO su Z_oZ_1 facendo perno su Z_1. Proseguendo in questo modo si avrà che a ciascun passo il triangolo delimitato da OX ed OZ_0 e da ciascuna t_k avrà gli angoli che soddisfano alla seguente condizione:

$2x_k + x_{k-1} + (\pi - \alpha) = \pi \qquad (k \geqslant 1)$

Per cui si ha: $\qquad 2x_k + x_{k-1} = \alpha$

Pertanto come detto precedentemente x_k si esprime come serie geometrica

$x = \alpha/3 + (-1/2)^k \, [x_0 - \alpha/3]$

La quale converge ad $\alpha/3$ in quanto $(-1/2)^k$ tende a zero. Quindi le rette t_n approssimano (per parallelismo) le due rette che trisecano l'angolo $\hat{\alpha}$ (a condizione che l'angolo $\hat{\alpha}$ sia compreso tra 0 e π).

Tratto da “Le dossiers du plot” Settembre 1985